TEOREMA D'EXISTENCIA DE RIEMANN

1. DIVERSOS TIPUS DE RECINTES SIMPLEMENT CONEXOS D'UNA FULLA

Ja és sabut que s'anomena conex un recinte d'una fulla quan es pot passar d'un dels seus punts a un altre qualsevol mitjançant una linia trencada d'un nombre finit de costats dins del recinte. Considerarem aquest format per punts tals que traçant al seu voltant un cercle de radi prou petit, els punts d'aquest son interiors al recinte.

Es diu *simplement conex* un recinte tal que prenent qualsevol curva tancada de Jordàn (*) dins d'ell, una de les dues regions en què aquesta divideix el pla queda completament dins del recinte. Si és possible el traçat d'una curva de Jordàn, de manera que de les dues regions en què la curva divideix el pla no n'hi ha cap de compresa completament en el recinte donat, aquest no és simplement conex.

D'aquí en avant, mentre no es digui res en contra, es parlarà de recintes simplement conexos.

Hi ha tres tipus de recintes simplements conexos en pla, i com a prototipus de cada un podem pendre:

1.er El pla indefinit o complet.

2.ón El pla incomplet o sense el punt de l'infinit.

3.er El cercle C_1 exclòs el seu contorn.

(*) Curva tancada de Jordàn es un conjunt de punts en correspondencia biunívoca i continua amb els punts d'una circumferencia.

Tots tres tipus de recinte són irreductibles, és a dir que no es pot passar mitjançant funcions analítiques regulars de l'un a l'altre, perquè, per una part, segons el teorema de Liouville (Conf. 1.ª, § 5), una funció analítica que es conserva finita en tot el pla és una constant; no és doncs possible la representació conforme del pla complet ni incomplet damunt del cercle. Per altra banda, no és possible el pas del pla complet a l'incomplet perquè tota funció analítica regular en el pla complet és una constant.

Ara, doncs, *donat un recinte simplement conex qualsevol,* una de tres: no exclou cap punt, en el qual cas és el pla complet, o n'exclou un tot sol, en el qual cas es pot representar evidentment sobre el pla incomplet, o *exclou un sistema continu de punts formant una linia o una àrea, en el qual cas anem a demostrar que és sempre representable conformement sobre un cercle.*

2. Reducció del recinte a un tipus únic

El recinte donat, tant si exclou una àrea com si exclou una curva, es pot transformar en un altre contingut en el cercle i contenint així mateix el centre d'aquest cercle.

α) Considerem el primer cas. Sigui O un punt de l'àrea exclosa, r el radi d'un cercle contingut completament dins de l'àrea. Prenent O com a origen, la funció

$$z' = \frac{r}{z}$$

transforma tot el recinte donaten un altre dins de C i que conté evidentment el centre d'aquest com a punt interior.

β) Tractant-se d'una linia, sigui A l'origen de la mateixa i B altre punt tal que units A i B per una recta aquesta no talla la curva en cap punt entre A i B. Anomenem a i b els valors de z en aquells punts. La transformació

$$z' = \frac{z-a}{z-b}$$

conduirà a una figura tal com la figura 8, en què el punt E a la distancia 1 de A és el transformat del punt a l'in-

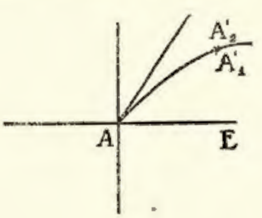

Fig.

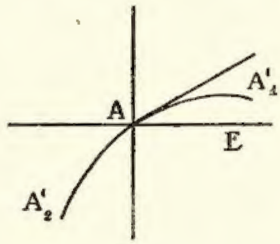

Fig. 9

finit. Obrint ara el recinte al llarg de la curva transformada mitjançant la nova transformació

$$w = \pm\sqrt{z'}$$

en la qual s'usa el signe + per a la vora superior de la curva i el — per a la inferior, s'obtindrà un nou recinte de la forma indicada en la figura 9 i transformant en cercle el semiplà que el conté, queda resolta la qüestió.

3. Limitació (Abschätzungssatz) de Carathéodory

Sigui un recinte $g_z \prec C_z$ i g_w el transformat dins de C_w. Suposem la transformació realisada per la funció $f(z)$ subjecta a les condicions següents:

$$f(o) = o$$
$$f'(o) = a > o \qquad (a \text{ real})$$

Suposem també que g_z i g_w contenen en llur interior els punts de C_{hz} i C_{hw}. Anem a demostrar que, fixant un cercle de radi $h\tau < h$, interior a g_z es verifica

α) $$|w-z| \leqq m$$

I que, essent m una quantitat que depèn sols de h i τ, i fixat τ, és

β) $$\lim m = 0 \quad \text{per } h \longrightarrow 1$$

En efecte. Posem

$$t = \frac{w}{z}.$$

Es fàcil veure que, per als punts de g_z exteriors a C_{hz},

$$|z| \geqq h$$
$$|w| < 1$$

i per consegüent

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

De la mateixa manera, per a punts interiors al cercle esmentat, posant $z = hz'$,

$$|z'| \leqq 1$$
$$|w| < 1$$

de manera que, aplicant el lema de Schwarz,

$$|w| < |z'|$$

i, per tant

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

Així es que, per a tot punt de g_z

$$|t| < \frac{1}{h}.$$

Partint de g_w s'arribaría a la conclusió

$$\left|\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{h},$$

per tant

$$h < |t| < \frac{1}{h} \qquad (a).$$

Aquesta igualtat, aplicada a l'origen, dóna

$$h < a < \frac{1}{h} \qquad (b).$$

Posem $t = at'$. La funció t' val 1 en l'origen, i en virtut de (a) i (b) satisfà a

$$h^2 < |t'| < \frac{1}{h^2}$$

és a dir, està compresa dins una corona o anell. Ara bé, hem vist que aquesta funció que té una limitació de mòdul, la té també d'argument (Conf. III § 4):

$$|\varphi| \leqq -\frac{2lh^2}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau} = -\frac{4 \log h}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau} \qquad (\tau < 1).$$

Aquesta limitació es verifica per a tot punt de g_1 ja que aquests corresponen a mòduls τ inferiors a 1.

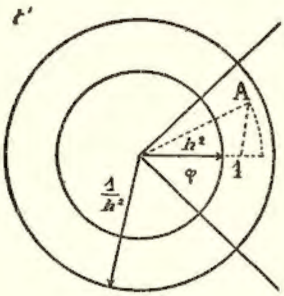

Fig. 10

Considerem ara la funció t' en un recinte limitat i sigui A undels seus punts. Cal notar (figura 10) que

$$|t' - 1| < \big||t'| - 1\big| + |t'|\,|\varphi|$$

Ultra això, tant si $|t'|>1$ com si $|t'|<1$,

$$\Big||t'|-1\Big|<\frac{1}{h^2}-1\,.$$

També és evident, per ésser el mòdul d'una suma inferior a la suma dels mòduls, que

$$|t-1|\leqq|t-a|+|a-1|=a|t'-1|+|a-1|$$

i finalment

$$|w-z|=|t-1|\,|z|\leqq|t-1|h\tau.$$

Aquestes relacions tenint present que, en virtut de (*b*) i d'ésser $h<1$,

$$1<\frac{a}{h^2}<\frac{1}{h^3},$$

porten fàcilment a la limitació següent que demostra a la vegada α) i β):

$$|w-z|=\frac{1-h^3}{h^2}\,\tau+\frac{-4\log h}{h^2\pi}\,\tau\log\frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

4. Teorema de convergencia (Carathéodory)

Sigui una successió indefinida de funcions analítiques regulars de la variable z.

$$f_1(z),\quad f_2(z),\;\ldots.\;f_n(z),\;\ldots.$$

que compleixen les condicions següents:

1.ª $f_n(o)=o$.

2.ª $f'_n(o)=a_n>o$ (*a* real).

3.ª *Les funcions* f_n *transformen l'àrea* $G_z\prec C_z$ (fig. 11) *en una altra àrea* $G_{nw}\prec C_w$ *biunívocament i conformement.*

4.ª *Cada àrea* G_{nw} *conté en son interior un cercle* $C_{h_n w}$, *de centre en l'origen de manera que*

$$h_1<h_2<\ldots.h_n<\ldots.\quad,$$

essent

$$\lim h_n = 1 \quad \text{per a} \quad n \longrightarrow \infty .$$

En aquestes condicions afirmem que

$$f(z) = \lim f_n(z) \quad \text{per a} \quad n = \infty ,$$

és una funció analítica y regular que convergeix uniforme-

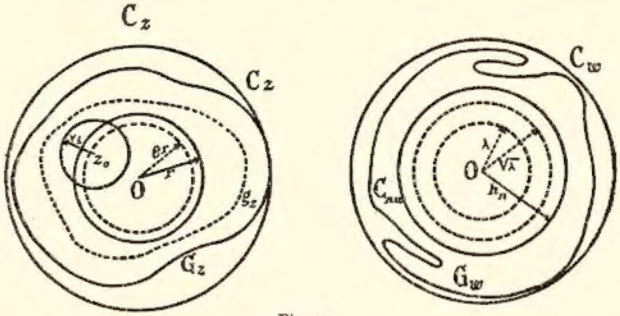

Fig. 11

ment en tot recinte g_z *de* G_z, *la qual transforma aquest en altre* G *que omple completament* C_w.

Si demostrem aquest teorema i arribem a formar les funcions f, quedarà demostrat el teorema de Riemann. La demostració del teorema comprèn tres parts que designarem per A, B i C.

A) *Limitació de les funcions f.*

Sigui z_0 un punt de G, i siguin u_1, u_2,... els seus transformats en el pla w mitjançant les funcions f_1, f_2 etc. *Tots els transformats es troben dins d'un cercle interior de radi* $\lambda < 1$.

En efecte: suposem en primer lloc, que z_0 es trobi interior a un cercle de centre O i radi r contingut completament en G. Per a tots els punts de cercle de radi $\theta r < r$ es verifica que $|f_n(z)| < 1$ i per tant, en virtut del lema de Schwarz,

$$|f_n(z)| < \frac{|z_0|}{r} \leqq \theta < 1 .$$

Aquesta desigualdat defineix ja un límit superior $\lambda_0 < 1$ per a $|f_n(z)|$ dins del cercle de radi r i fins per als punts de la seva circumferencia. Considerem ara els punts d'un altre cercle de radi r_1 i centre z_0 tot ell contingut en G. Per als punts del nou cercle es té així mateix

$$|z - z_0| < r \qquad ; \qquad |f_n(z)| < 1.$$

Per tant, en virtut de la conseqüencia del lema de Schwarz, es verifica la limitació següent:

$$|f_n(z)| < \frac{\lambda_0 + \theta_1}{1 + \lambda_0 \theta_1} < 1.$$

Tot punt de G es pot assolir amb un nombre finit d'entorns circulars segons la mateixa definició de G; per consegüent, per a tot punt de G pot trobarse un número $\lambda < 1$ que doni

$$|f_n(z)| < \lambda.$$

Sigui g un recinte qualsevol provist de contorn contingut en G i del qual sigui O un punt interior. Anem a demostrar que existeix un número fix $\lambda < 1$, tal que

$$|f_n(z)| < \lambda < 1 \qquad (\alpha)$$

per a tot valor de n i tot punt z que pertanyi a g. En efecte: considerem en cada punt z de g l'entorn circular corresponent i es trobarà segurament un número $\lambda_i < 1$ que satisfà en cada punt la condició α. Ara doncs amb un nombre finit d'entorns circulars, es pot cobrir g completament (T. de Borel) (*). En virtut d'això caldrà només pendre entre els λ_i corresponents, el màxim.

B) *Convergencia de la successió de funcions f.*

Els transformats successius dels punts del recinte g, es troben tots dins d'un cert cercle de radi $\lambda < 1$ en el

(*) Vegis la nota al final de la Conferencia.

pla w, per consegüent, i amb més raó, dins del cercle de radi $\sqrt{\lambda}$.

Com que els radis h_n dels cercles que contenen les transformades G_n de G van augmentant i tenen per límit 1, sempre es podrà trobar un valor N de n prou gran perquè

$$1 > h_N \geqq \sqrt{\lambda} \qquad (\beta)$$

i tots el transformats successíus G_N, $G_{N+1} \ldots$ continguin el cercle de radi $\sqrt{\lambda}$ en son interior.

Es recordarà (Conferencia 1.ª, 6) que una successió de funcions f_1, $f_2, \ldots$ s'anomena uniformement convergent en un cert recinte g, quan, donat ε tan petit com se vulgui pugui donar-se un número únic n tal, que

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon \qquad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

per a tot valor de z pres en g (i per tant f_n (z) dins del cercle λ).

Aquesta propietat en el cas que ens ocupa, es pot considerar com a conseqüencia fàcil del que tenim dit. En efecte: del moment en què $f_n(z)$ representa un punt de G_n i $f_{n+p}(z)$ un punt de G_{n+p}, els punts de G_n i G_{n+p} es corresponen conformement. El teorema de Carathéodory, abans demostrat, és perfectament aplicable perquè ambdós recintes contenen un cercle de radi h_n i es corresponen els centres i les direccions paral·leles. Però el teorema ens indica que, en tot cercle interior a h_n, és a dir, de radi $h_n\tau$, $(\tau < 1)$ esdevé:

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < m$$

essent m una quantitat que tendeix a zero quan h_n tendeix a 1. Prenem $\tau = \sqrt{\lambda}$ i $n = N$ amb la cual cosa $h_N\tau$ serà superior a λ en virtut de (β) i, per tant, dins del cercle λ es verifica segurament la limitació anterior.

Sembla que encara es podría presentar la dificultat d'ésser una constant el valor de lim $f_n(z)$ per $n \longrightarrow \infty$; en aquest cas no hi hauría representació conforme, però aquest cas no es pot presentar, puix essent la convergencia uniforme es verifica

$$f'(o) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f'_n(o) \qquad \text{i també } f'_n(o) = a_n > h_n > h_o.$$

C) *De com se defineix amb les funcions f, la funció que realitza la representació conforme.*

La successió de funcions defineix, doncs, pel teorema de Weierstrass, una funció analítica en tot el recinte G; aquesta efectúa la representació biunívoca i conforme de G sobre C_w. En efecte: els punts transformats de cada punt z_o de G són tots interiors a C_w; i per ésser

$$|f_n(z_o)| < \lambda < 1,$$

en el límit serà:

$$|f(z_o)| \leqq \lambda < 1.$$

A tot punt, doncs, de G correspòn un punt interior a C_w.

Per altra banda, donat un punt w, el transformat en el pla de les z és un punt únic. O sigui $w = f(z)$ té una sola arrel en z de mòdul menor que 1. Per a demostrar-ho hom es pot valer del teorema de Hurwitz que ens diu que, *si una equació es pot considerar com el límit d'una altra en què entra un paràmetre variable n, i al créixer n, a partir d'un cert valor d'aquell, el nombre d'arrels compreses entre certs límits romàn invariable, aquest mateix és el nombre d'arrels per al límit* $n = \infty$.

Ara doncs, quàntes arrels té $f_n(z) = w$ dins de C_z? Recordem que G i G_n tenen per hipòtesi correspondencia biunívoca i conforme. Ara doncs, es pot sempre escollir n prou gran perquè el punt donat w estigui dins del cercle de radi h_n contingut en G_n. Amb la cual cosa, per a la correspondencia entre G i G_n (així com aquells en què n és major) hi ha biunivocitat.

En tot el desenrotllament de les demostracions no s'ha parlat per a res del contorn de G. S'esdevé que la correspondencia en els punts del contorn ens pot donar punts de C_w discontinuament, i no haver-hi encara correspondencia o finalment pot existir correspondencia continua. Això però depèn de cada cas particular. Si el contorn està constituit per curves analítiques, la correspondencia en la circnmferencia C_w es continua, com veurem un altre dia.

5. Teorema d'existencia (Koebe-Carathéodory)

Sigui A un punt del contorn de G que disti de l'origen O menys o al màxim igual que els altres punts del contorn. Sigui h la distancia AO. Considerem el cercle de dues fulles que té en A un punt de bifurcació. El cercle de dues fulles es pot transformar en un altre d'una fulla. La funció que realitza aquesta transformació sigui f_1. La iteració del procés ens conduirà a f_2, f_3 etc.

Comencem per portar el punt de bifurcació a l'origen mitjançant

$$z=\frac{z'-h}{1-z'h}.$$

El cercle de radi h es transforma en altre cercle excèntric. La transformació

$$z'=z''^2$$

converteix el pla de les dues fulles en el d'una i aquest últim cercle en un recinte limitat per una branca de lemniscata. L'origen primitiu és ara un punt interior. Passant-lo a l'origen altra vegada mitjançant

$$z'' = \frac{z_1 + \sqrt{h}}{1 + z_1\sqrt{h}}$$

resulta la transformació

$$z = z_1 \frac{z_1 + c}{z_1 c + 1} \qquad (\gamma)$$

en la qual

$$c < \frac{2\sqrt{h}}{1 + h} < 1.$$

Anem a demostrar que (γ) augmenta els radis vectors i quedarà així provada la propietat de les funcions f de contenir les transformades de G en llur interior cercles de radi creixent amb l'índex que els correspón. En efecte: posem

$$w = \frac{z}{z_1} = \frac{z_1 + c}{z_1 c + 1}.$$

Quan z, romàn a l'interior de C la funció w de z, romàn a C_w. Per tant, en tot cercle de radi $h < 1$,

$$|w| < 1$$

i pel lema de Schwarz, serà:

$$|z| < |z_1|$$

és a dir, si h_1 és el mínim valor de la distancia del contorn transformat de G per la funció z_1 de z, és

$$h < h_1$$

com es volía demostrar.

Les h van creixent i lim $h_n = 1$ per $n = \infty$. En efecte: una de les conseqüencies del lema de Schwarz deduides en la tercera conferencia, ens diu que, si $|z_1| < h_1$,

$$|w| \overline{\gtrless} \frac{c + h_1}{1 + h_1 c} < 1.$$

Per tant, dins del cercle de radi h_1

$$|z| \overline{\leq} |z_1| \frac{c_1 + h_1}{1 + h_1 c} \overline{\leq} h_1 \frac{c + h_1}{1 + h_1 c}.$$

El valor mínim de $|z|$ és inferior a tot altre valor de $|z|$; per tant

$$h \overline{\leq} h_1 \frac{c + h_1}{1 + ch_1}.$$

I, en conseqüencia

$$1 - h \overline{\geq} \frac{1 - h_1^2}{1 + h_1 c}$$

$$1 - h_1 \overline{\leq} (1 - h) \frac{1 + h_1 c}{1 + h_1}.$$

Aquestes fórmules es refereixen al pas de G a G_1. Posant h_{n-1} en lloc de h i h_n en lloc de h_1, tindrem

$$1 - h_n \overline{\leq} (1 - h_{n-1}) \frac{1 + h_n c}{1 + h_n}.$$

El tencat del segòn membre disminueix a l'augmentar h i serà sempre menor que $\frac{1 + hc}{1 + h} = \tau$ essent τ un número fix. Per tant

$$1 - h_n < (1 - h_{n-1}) \tau < (1 - h) \tau^n.$$

Com que $\tau < 1$ al crèixer n indefinidament τ^n tendeix a zero i per tant

$$\lim h_n = 1 \quad \text{per a} \quad n \longrightarrow \infty$$

que és lo que's volía demostrar.

La convergencia és massa lenta per a les aplicacions numèriques o gràfiques, recorrent-se per a aquest objecte a altres mètodes, com el ja indicat de Bieberbach.